Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 5 - 14/9 (versión preliminar)

1 El discreto encanto de la periodicidad

Se cuenta que en las clases previas anduvimos resolviendo problemas de Dirichlet para sistemas, empleando el teorema de Brouwer y allegados. Es el turno ahora del problema periódico para la ecuación escalar de segundo orden

$$u''(t) = f(t, u(t))$$

para la cual, como dijimos, el operador de Poincaré va a depender de dos variables: resolvemos la ecuación con condiciones iniciales

$$u(0) = x, \qquad u'(0) = y$$

para entonces definir. $P(x, y) = (u(T), u'(T))$. Como mencionamos, no es fácil conocer de antemano el dominio de P, aunque sabemos que es abierto.

A diferencia de las condiciones de Dirichlet, estamos ahora -diría la prensa amarillista- ante un caso resonante; por eso, el hecho de que f sea acotada no es garantía de que existan soluciones. Tampoco alcanza con pedir que f sea creciente en u: por ejemplo, si ponemos $f(t, u) = e^u$ estamos en serios problemas. Pero una situación "fácil" ahora podría ser aquella en el que f es positiva cuando $u \gg 0$ y negativa cuando $u \ll 0$. O, para decirlo de una manera elegante, cuando existe R tal que

$$uf(t, u) > 0 \qquad |u| \geq R. \tag{1}$$

A esta altura, con tantos truncamientos en nuestro haber, es un ejercicio sencillo ver que si u es solución T-periódica de $u''(t) = f(t, T_R(u))$ entonces es solución del problema original; por eso, para facilitar las cosas podemos ya suponer que f es acotada, con $\|f\|_\infty := M$. Sea u una solución del problema de valores iniciales con $y = MT$, entonces

$$u'(t) = MT + \int_0^t f(s, u(s))\, ds \geq M(T - t) \geq 0,$$

de donde se deduce que $u(T) \geq u(0)$. Análogamente, si $y = -MT$ vale $u(T) \leq u(0)$. Por otra parte, como $|u''(t)| \leq M$, siempre vale que $|u'(t)| \leq 2TM$. Luego, acotando mal y de pronto, resulta

$$|u(t) - x| = t|u'(\xi)| \leq 2T^2 M$$

para todo $t \in [0,T]$. Entonces, si fijamos $\tilde{R} = R + 2T^2 M$, para $x = \tilde{R}$ tenemos que

$$u(t) \geq \tilde{R} - 2T^2 M \geq R$$

y en consecuencia $f(t, u(t)) > 0$. Luego

$$u'(t) - y = \int_0^t f(s, u(s))\, ds > 0.$$

Del mismo modo, para $x = -\tilde{R}$ vale $u'(t) - y < 0$. Esto dice que si definimos

$$F(x,y) = (u'(T) - y, u(T) - x)$$

entonces se puede aplicar el teorema de Poincaré-Miranda en el rectángulo $[-\tilde{R}, \tilde{R}] \times [-MT, MT]$.

Cabe aclarar que cuando f es acotada la cuenta anterior sale exactamente igual, vale decir: también hay soluciones si asumimos la hipótesis opuesta,

$$uf(t,u) < 0 \qquad |u| \leq R.$$

Sin embargo, si f no es acotada se nos arruina el estofado, ya que no tiene por qué haber cotas a priori. Y, de hecho, es fácil inventar problemas para los cuales no hay solución. Por poner un ejemplo drástico, se podría tomar $f(u) = -\lambda u + p(t)$, con tanta puntería como para que $\lambda > 0$ sea justito un autovalor. En ese caso, hay solución solamente cuando p es perpendicular (en el sentido de L^2) a las correspondientes autofunciones. Para dejarlo más claro, pongamos por ejemplo la ecuación

$$u''(t) + u(t) = p(t)$$

con $T = 2\pi$. Si u es solución periódica, entonces

$$\int_0^{2\pi} p(t) \mathrm{sen}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} [u''(t) + u(t)] \mathrm{sen}(t)\, dt = 0$$

y

$$\int_0^{2\pi} p(t) \cos(t)\, dt = \int_0^{2\pi} [u''(t) + u(t)] \cos(t)\, dt = 0.$$

Pero el caso lineal funciona bárbaro cuando la pendiente es positiva y, más en general, hay solución para $f(t,u) = \eta u + g(t,u)$, con $\eta > 0$ y g una función acotada, que incluso podría depender también de u'. ¡Gran noticia! Esto dice que si agregamos un término lineal ηu a la ecuación podemos ahuyentar los espíritus de la resonancia: es un fantasma que crea nuestra ilusión.

A modo de aplicación típica, consideremos otra vez la condición de Hartman

$$f(t,R) > 0 > f(t,-R).$$

Uno podría preguntarse en qué se diferencia de (1); sin embargo, es claro que aquí solo pedimos una condición para $|u| = R$ y dejamos completa libertad para que f haga lo que le plazca si $|u| > R$. Y sabemos que truncar a lo bruto no funciona, pero podemos movernos un poquito de la resonancia, eligiendo por ejemplo $\eta = 1$:

$$u''(t) - u(t) = f(t, u(t)) - u(t).$$

El resultado no parece muy prometedor, ya que se trata de la misma ecuación, pero ahora sí podemos mandarnos un buen truncamiento:

$$u''(t) - u(t) = f(t, T_R(u(t))) - T_R(u(t)).$$

Este nuevo problema tiene solución T-periódica porque el término del lado derecho es acotado; por otra parte, si $u(t_0) > R$ para algún t_0, podemos suponer que se trata de un máximo y si $t_0 \in (0, T)$ vale

$$0 \geq u''(t_0) = f(t_0, R) + u(t_0) - R > 0,$$

absurdo. Queda como ejercicio ver lo que ocurre si t_0 se encuentra en el borde del intervalo y verificar, de la misma forma, que $u \geq -R$, es decir, que u es solución del problema original. Dicho sea de paso, cabe observar que la cuenta sale también si la condición de Hartman no es estricta, es decir:

$$f(t, R) \geq 0 \geq f(t, -R).$$

Pero donde sí se pone estricto Hartman es en el sentido de las desigualdades: a diferencia del problema de primer orden, la cosa no funciona si

$$f(t, R) < 0 < f(t, -R),$$

con lo que queda probado que el truncamiento a veces trunca.

Si f es creciente respecto de u se puede poner una hipótesis más débil. Empecemos por obtener una condición necesaria: si u es solución del problema periódico, entonces

$$0 = \int_0^T u''(t)\, dt = \int_0^T f(t, u(t))\, dt.$$

Luego, para $R > \|u\|_\infty$ vale:

$$\int_0^T f(t, R)\, dt \geq 0 \geq \int_0^T f(t, -R)\, dt$$

y las desigualdades son estrictas, por ejemplo, cuando f es estrictamente creciente. Esta última es también una condición suficiente:

Proposición 1.1 *Si f es creciente y existe R tal que*

$$\int_0^T f(t, R)\, dt > 0 > \int_0^T f(t, -R)\, dt,$$

entonces el problema periódico tiene solución.

Demostración: Si u es solución, entonces

$$u(t)u''(t) = [f(t,u(t)) - f(t,0)]u(t) + f(t,0)u(t) \geq f(t,0)u(t),$$

luego

$$\int_0^T u'(t)^2\,dt \leq \left|\int_0^T f(t,0)u(t)\,dt\right|$$

y, en definitiva:

$$\|u'\|_{L^2}^2 \leq C\|u\|_\infty.$$

Esto prueba (ejercicio) que existen constantes A, B independientes de u tales que $\|u - u(0)\|_\infty \leq A\sqrt{|u(0)|} + B$. De esta forma se encuentran cotas a priori para u: por ejemplo, si $u(0) \gg 0$, entonces

$$u(t) = u(t) - u(0) + u(0) \geq u(0) - A\sqrt{u(0)} - B > R$$

y entonces

$$0 = \int_0^T f(t,u(t))\,dt \geq \int_0^T f(t,R)\,dt > 0,$$

lo que es absurdo. Esto quiere decir que $u(0)$ no puede ser muy grande, de modo que existe M tal que $\|u\|_\infty \leq M$. Y la cota, señoras y señores, depende solamente de $f(t,0)$ y de la monotonía (nunca mejor dicho, después de haber aplicado el mismo argumento tantas veces). Entonces podemos truncar. ¿Cómo? Empleando algún truquito que antes nos haya salido bien: por ejemplo, para cada t fijo podemos tratar de hacer como en la figura 1. La idea es clara (aunque el dibujo no tanto): se trata de lograr que la función $\hat{f}$ cumpla

$$u\hat{f}(t,u) > 0$$

para $|u| \gg 0$. ¿Funcionará bien? Los detalles quedan a cargo del lector.

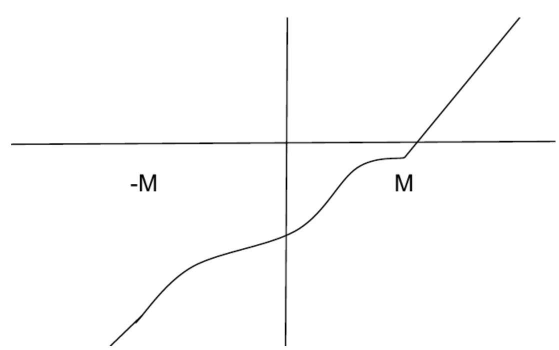

Figure 1: A truncar, a truncar, que la orquesta se va

$\square$

Observación 1.1 *Igual que en el caso de Dirichlet, para f creciente es fácil ver que la solución es única salvo constantes, es decir: si u y v son soluciones, entonces $u = v + c$. Claro que en ese caso $f(t, z)$ tiene que ser constante para z entre $u(t)$ y $v(t)$.*

1.1 La ecuación $u''(t) + g(u(t)) = p(t)$

Al igual que en el problema de primer orden, ofrece especial interés el caso en que $f(t, u) = g(u) + p(t)$ con g acotada, para el cual Lazer probó la existencia de soluciones del problema T-periódico bajo una de las siguientes condiciones

$$g(u) < \overline{p} < g(-u) \qquad u \geq R \tag{2}$$

o bien

$$g(u) > \overline{p} > g(-u) \qquad u \geq R. \tag{3}$$

En definitiva, lo importante es que g se encuentre por arriba del promedio de p de un lado y por debajo del otro, lo que se puede escribir de la siguiente forma:

$$(g(u) - \overline{p})(g(-u) - \overline{p}) < 0 \qquad u \geq R.$$

Cabe destacar también que, restando y sumando $\overline{p}$, siempre se puede suponer que p tiene promedio cero. En tal sentido, la situación se parece al "caso fácil" que resolvimos al comienzo, aunque la condición ahora no es para todos los valores de t sino únicamente para el promedio. La situación (2), dicho sea de paso, es más benévola y no hace falta pedir que g sea acotada. ¿Por qué? Como es de esperar, porque se pueden encontrar cotas, tarea que queda para el lector.[1] En resumen (truncamiento mediante), ya podemos suponer que g es acotada en ambos casos y llamemos $M := \|g\|_\infty + \|p\|_\infty$. Tal como hicimos antes, si u es solución del problema de valores iniciales con $u'(0) = y = MT$, entonces $u(T) - u(0) \geq 0$ y, análogamente, si $y = -MT$ entonces $u(T) - u(0) \leq 0$. Esto prepara el terreno para un nuevo mirandazo: exactamente igual que antes, si $\tilde{R} \gg 0$ y $u(0) = \pm\tilde{R}$ se deduce que $u(t) > R$ y $u(t) < -R$ respectivamente y el resultado sale entonces usando que

$$u'(T) - y = \int_0^T [p(t) - g(u(t))]\, dt = -\int_0^T g(u(t))\, dt,$$

de donde se obtiene el tan ansiado cambio de signo.

El resultado forma parte de una familia general de problemas resonantes, conocidos en la literatura bajo el nombre de *Landesman-Lazer*. En el resultado original, para un problema en derivadas parciales, Landesman y Lazer impusieron condiciones algo más fuertes a la no-linealidad (acotada) g: que existan los límites en $\pm\infty$. En ese caso, las condiciones (2) y (3) simplemente dicen que

$$g(+\infty) < \overline{p} < g(-\infty)$$

[1] A modo de ayuda, solo observaremos que la condición (2) con $\overline{p} = 0$ implica que $ug(u) \leq M$ para cierta constante M, así que al multiplicar la ecuación por u...

o bien

$$g(-\infty) < \overline{p} < g(+\infty).$$

Las condiciones (2) y (3) todavía son asintóticas, en el sentido de que especifican algún comportamiento de g fuera de un compacto; sin embargo, una extensión no asintótica del resultado de Lazer se puede ver en el ejercicio xxxx. El resultado original de Lazer es para g continua y con desigualdades no estrictas, dificultades que ya sabemos sortear. Claro que no nos referimos a sortearlas para ver quién las resuelve, sino a esquivarlas con cierto grado de destreza.

Observación 1.2 *Las condiciones anteriores tienen una interpretación interesante en términos de lo que significa la resonancia. Dejando de lado los detalles (y los espacios involucrados), observemos que el operador* $Lu := u''$*, bajo las condiciones periódicas, tiene núcleo no trivial: esa es, de hecho, la definición de resonancia. Más precisamente, el núcleo consiste en todas aquellas funciones periódicas tales que* $u'' \equiv 0$*, vale decir: las constantes. ¿Y la imagen? Integrando, es fácil ver que el problema* $u''(t) = \varphi(t)$ *admite una solución periódica si y solo si el promedio de* φ *es* 0*. Pero si ahora pensamos en el producto interno de* L^2*, esto equivale a decir que* φ *es ortogonal a las constantes, es decir, al núcleo de* L*. Por supuesto, esto no es casualidad: en principio, para cualquier operador simétrico vale que la imagen es ortogonal al núcleo, ya que si* $v \in \ker(L)$ *entonces*

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle = 0.$$

Pero el hecho de que la imagen sea exactamente el complemento ortogonal del núcleo dice algo más; aquel que haya visto nociones de análisis funcional podrá recordarlo: tal vez le suene (o mejor: resuene) la palabrita 'Fredholm'.

El resultado entonces puede verse de la siguiente manera: dada una función p*, su proyección sobre el núcleo es precisamente* $\overline{p}$*. Cuando* $g = 0$*, el problema solo tiene solución si* $\overline{p} = 0$*. Ahora podemos pensar que el operador* $u'' + g(u)$ *es una pequeña perturbación de* L*, cuya imagen contienene todas aquellas* p *cuya proyección al núcleo es chica. Ese es el espíritu de resultados como el de Lazer-Leach que aparece en el ejercicio xxxxx, en el que el autovalor tiene multiplicidad mayor que* 1*.*

2 Índice de una curva, sin complejos

En los ejemplos de shooting bidimensional fue de crucial importancia el teorema de Brouwer y sus versiones equivalentes, entre las que mencionamos el teorema de Rouché. Claro que, en este caso, se trata de un resultado de análisis complejo, aunque intentamos justificarlo con ese asunto del perrito. Vamos a ver ahora una explicación más precisa de la idea de *número de vueltas*, que se expresa en el índice de una curva. Esto es algo bien conocido para quien haya tomado un curso de variable compleja pero, como veremos, se puede introducir a partir de ideas más elementales.

Recordemos, de todas formas, la definición usual, según la cual si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una curva cerrada que no pasa por w, entonces su índice alrededor de w se define como

$$I(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-w}\, dz.$$

Claro que primero hay que entender qué significa esa integral a lo largo de una curva, cosa que en principio es bastante fácil cuando γ es C^1 a trozos, vale decir, es continua y $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ es de clase C^1 para ciertos $a = t_0 < t_1 \ldots t_N = b$. Recordemos, de paso, que 'cerrada' quiere decir simplemente que $\gamma(a) = \gamma(b)$. En ese caso, se define

$$I(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w}\, dt$$

y, con un poco de esfuerzo, se ve que su valor es siempre un número entero y se puede extender para cualquier γ que solo sea continua. Como sea, esta definición todavía no deja del todo claro por qué esta integral cuenta el número de vueltas alrededor de w.

Vamos a ver esto de manera elemental, sin recurrir al análisis complejo. Por simplicidad, suponemos $w = 0$ y directamente denotamos $I(\gamma) := I(\gamma, 0)$. También es claro que podríamos, reparametrizando, suponer siempre $[a,b] = [0,1]$, aunque a veces es más cómodo usar otros intervalos: por ejemplo, la circunferencia de radio R se parametriza mediante la curva $\gamma(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, evitando constantes molestas a la hora de derivar.

En primer lugar, si escribimos $\gamma = x + iy$ entonces el cociente γ'/γ se puede escribir de manera más amigable (cada uno elige sus amigos como mejor le parece):

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{\gamma'(t)\overline{\gamma(t)}}{|\gamma(t)|^2} = \frac{x'(t)x(t) + y'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} + i\frac{y'(t)x(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

Cabe observar ahora que la parte real de este cociente es la derivada de la función $\ln(x(t)^2 + y(t)^2)$; luego, como pedimos que γ no se anule, sin mayor empacho podemos escribir

$$\int_a^b \mathbf{Re}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right) dt = \ln(|\gamma(b)|^2) - \ln(|\gamma(a)|^2) = 0,$$

ya que γ es cerrada. Todo parece indicar que el resultado no es fortuito: mirando la definición, quiere decir simplemente que $I(\gamma)$ es un número real.

Ahora tenemos que mirar el otro término, que (hoy es nuestro día de suerte) también tiene una primitiva fácil de calcular: $\arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$. ¿Será entonces que la integral de $\mathbf{Im}(\gamma'/\gamma)$ también es 0 y podemos pasamos a hablar de otra cosa?

La respuesta, obviamente es que no: la clave está que, a diferencia de la otra integral, ahora el denominador sí se puede anular, causando un ligero desbarajuste. Sin embargo, podemos ver que no es tan grave cuando analizamos una situación sencilla que, de paso, nos ayuda a entender por qué $I(\gamma)$ cuenta realmente (y no imaginariamente) el número de vueltas. Por ejemplo, si $x(t)$ nunca se anulara, la cuestión sería sencilla: en ese caso aplicamos Barrow sin piedad y resulta $I(\gamma) = 0$. Pero una γ así de cautelosa se mantiene siempre de un mismo lado del eje y, de modo que no da ninguna vuelta alrededor del origen.

Ahora supongamos por ejemplo que c y d son dos ceros consecutivos de x y que y no se anula en esos puntos, entonces vale

$$\int_c^d \mathbf{Im}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right) dt = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)\Big|_{c^+}^{d^-}$$

Teniendo en cuenta que $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$, el valor de esta integral puede ser 0, π o $-\pi$, dependiendo de los signos de x y de y. Observemos que el signo de $x(d^-)$ es el mismo que el de $x(c^+)$, de modo que si ese tramo de la curva no atraviesa el eje x, no aporta nada a la cuenta total. En cambio, si $y(d)$ tiene el signo opuesto al de $y(c)$, la integral da $\pm\pi$, de modo que al calcular el índice (¡no se olviden de 2π!) ese tramo aporta $\pm\frac{1}{2}$, según si la 'media vuelta' es en sentido positivo (antihorario) o negativo (horario).

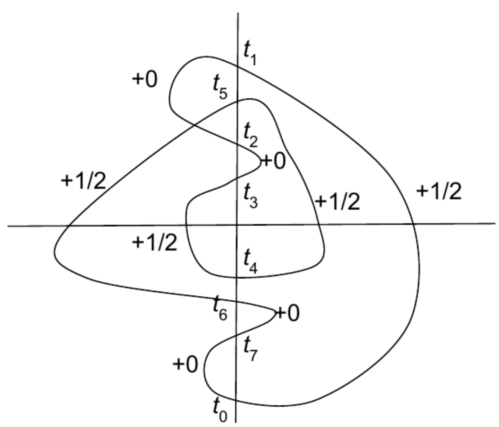

Figure 2: Una curva con índice 2

Ahora que entendimos lo que significa el índice cuando la curva es "buena", intentaremos extender la definición para cualquier curva continua, mediante un recurso sencillo: aproximarla por funciones suaves a trozos. Pero para eso necesitamos ver que dos curvas cercanas entre sí tienen el mismo índice. Empecemos con el siguiente lema:

Lema 2.1 *Sea $h : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ de clase C^2 tal que $h(a,s) = h(b,s)$ para todo s. Entonces el índice de la curva $\gamma_s := h(\cdot, s)$ es independiente de s.*

Demostración: Basta observar que

$$I'(s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\int_a^b \frac{\frac{\partial h}{\partial t}(t,s)}{h(t,s)}\,dt\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}(t,s)}{h(t,s)}\right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial s}(t,s)}{h(t,s)}\right) dt = \left.\frac{\frac{\partial h}{\partial s}(t,s)}{h(t,s)}\right|_a^b = 0$$

ya que $h(\cdot, s)$ es cerrada para todo s.

$\square$

La demostración del lema anterior involucra derivadas segundas, aunque directamente pedimos que h sea de clase C^2 para evitar el escandalete de la derivada bajo el signo integral. El misterioso cambio de orden en la derivación se basa simplemente en el hecho de que las derivadas segundas conmutan y que la regla del cociente para funciones de variable real también vale si se trata de un cociente de números complejos:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}}{h}\right) = \frac{h\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial t} - \frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}}{h^2} = \frac{h\frac{\partial^2 h}{\partial t\partial s} - \frac{\partial h}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}}{h^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial s}}{h}\right)$$

Respecto del nombre de la función, cabe decir que la h es muda pero, en este caso, bastante elocuente: se trata de una *homotopía*, concepto que nos va a acompañar fielmente de ahora en adelante.

Pero hablando de acompañar fielmente: ¿en qué quedó nuestro teorema de Rouché? Para curvas, la interpretación perruna aparece en todo su esplendor:

Lema 2.2 *Sean $\gamma, \delta : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ curvas cerradas de clase C^2 tales que*

$$|\gamma(t) - \delta(t)| < |\delta(t)|$$

para todo t. Entonces $I(\gamma) = I(\delta)$.

Demostración: Definimos $h(t,s) = s\gamma(t) + (1-s)\delta(t)$. Si $h(t,s) = 0$, vale

$$s(\gamma(t) - \delta(t)) = -\delta(t)$$

y luego

$$s|\gamma(t) - \delta(t)| = |\delta(t)| < |\gamma(t) - \delta(t)|$$

lo que es absurdo para $s \in [0,1]$. El resultado se deduce entonces del lema anterior, ya que $h(\cdot, 0) = \delta$ y $h(\cdot, 1) = \gamma$.

$\square$

El resultado, al igual que el lema previo, vale también cuando las funciones involucradas son solamente continuas aunque, claro está, primero tenemos que dar una definición adecuada del índice para curvas que no son derivables. Esto se puede hacer de varias maneras; en nuestro caso, vamos a apoyarnos precisamente en el lema anterior: de esta forma, nuestro perrito tendrá un rol protagónico (otra que Rin Tin Tin, dirá algún lector entrado en años). Por comodidad, observemos que el resultado funciona también si las curvas son C^2 a trozos.

References

[1]